$\boxed{26/02}$ 8) ∇ Вейерштрасса в задаче о нагреве стержня

(8.1) $J(u) = \int_0^l (y(T, x; u) - b(x))^2 dx \to \inf$

↳ известно (температура)

(8.2) $y_t = y_{xx}$, $(t, x) \in Q = \{(0,T) \times (0,l)\}$

(8.3) $y_x|_{x=0} = 0$, $y_x|_{x=l} = u(t) - y|_{x=l}$, $t \in [0, T]$

↳ тепловой источник ↳ теплообмен с окр. средой

(8.4) $y|_{t=0} = 0$, $x \in [0, l]$

$y(t, x)$ – температура стержня

Цель: достичь данной температуры

(8.5) $u(t) \in U = \{u(t) \in L_2(0,T) : \alpha \overset{\text{п.в.}}{\leq} u(t) \overset{\text{п.в.}}{\leq} \beta\}$

Введем оп-р $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}u = y(T, x; u)$; $\mathcal{A}: \underbrace{L_2(0,T)}_{H} \to \underbrace{L_2(0,l)}_{F} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{J}(u) = \|\mathcal{A}u - b\|^2_{L_2(0,l)}$

$\mathcal{A} \overset{?}{\in} \mathcal{L}(H \to F)$

▲ <u>Линейность</u>. Известно, что: (8.6) $y(t, x; \alpha u + \beta v) = \alpha y(t, x; u) + \beta y(t, x; v)$, $\forall t \in [0, T]$

Подставим в (8.6) $t = T \Rightarrow \mathcal{A}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{A}u + \beta \mathcal{A}v$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ – лин.

<u>Ограниченность</u> (т.е. $\exists C > 0$: $\underbrace{\|\mathcal{A}u\|_F}_{\sqrt{\int_0^l (\mathcal{A}u)^2 dx}} \le C\|u\|_H$, $\forall u \in H$; $\sqrt{\int_0^l (\mathcal{A}u)^2 dx} \le C\sqrt{\int_0^l u^2(t)dt}$)

Из (8.2) $\Rightarrow \iint\limits_Q y_t \cdot y\,dx\,dt = \iint\limits_Q y_{xx} y\,dx\,dt$

Л.ч.: $\iint\limits_Q y_t y\,dx\,dt = \int_0^l \int_0^T \frac{1}{2}(y^2)\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_0^l y^2\big|_{t=T} dx - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l y^2\big|_{t=0} dx}_{\substack{=0 \\ \text{(нач. усл.)}}}$

$= \frac{1}{2}\int_0^l y^2(T, x; u)\,dx = \frac{1}{2}\|\mathcal{A}u\|^2$

П.ч.: $\iint\limits_Q y_{xx} y\,dx\,dt = \int_0^T y_x y\big|_0^l dt - \iint\limits_Q y_x y_x\,dx\,dt = \int_0^T u(t) y(t, l; u)\,dt -$ (в силу кр. усл.)

$- \int_0^T y^2(t, l; u)\,dt - \int_0^T \int_0^l y_x^2(t, x; u)\,dx\,dt$ // Далее: л.ч. = п.ч. //

$\|\mathcal{A}u\|^2 = 2\int_0^T u(t) y(t, l; u)\,dt - 2\int_0^T y^2(t, l; u)\,dt - 2\iint\limits_Q y_x^2(t, x; u)\,dx\,dt$

// $2ab \le a^2 + b^2$ //

$\Rightarrow \|\mathcal{A}u\|^2 \le \int_0^T u^2(t)dt + \cancel{\int_0^T y^2(t, l; u)dt} - \cancel{2}\int_0^T y^2(t, l; u)\,dt -$

$- 2\iint\limits_Q y_x^2(t, x; u)\,dx\,dt \le \int_0^T u^2(t)\,dt = \|u\|^2_{L_2(0,T)}$ ■

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \to F) \Rightarrow$ можно применить Т В. д/квадратич. функц-ла.

II. Дифференцирование. 1) Основные понятия

] X, Y – нормир. пр-ва; $F: X \to Y$, определ. в x_0 и некот. её окр-ти $O_\varepsilon(x_0)$

Опр. Отображ. F дифф-мо (по Фреше) в т. x_0, if $\exists\, L =$

$= L(x_0) \in \mathcal{L}(X \to Y)$

$\mathcal{F}(x_0+h) - \mathcal{F}(x_0) = \underbrace{L}_{\| F'(x_0)\text{ — 1ая произв., } X\to Y\text{, лин. и огр.}} h + \alpha(x_0, h)$, $\|h\| < \varepsilon$, $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \dfrac{\|\alpha(x_0,h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$

Опр $\exists\ F'(x_0)$ опр. в $O_\varepsilon(x_0)$. Тогда производ. $\mathcal{F}'(x_0)$ в т. x_0 наз-ся 2й произв-й

$\left(\mathcal{F}'(x_0+h) - \mathcal{F}'(x_0) = F''(x_0)\cdot h + \beta(x_0,h);\right.$

$\left.\mathcal{F}''(x_0) \in \mathcal{L}(X \to \mathcal{L}(X\to Y))\right)$

$\measuredangle$ функц-л $\mathcal{Y}(u): \underbrace{H}_{X} \xrightarrow{\text{гильб.}} \underbrace{\mathbb{R}^1}_{Y}$

Опр Будем говорить, что $\mathcal{Y}(u)$ дифф. в т. u, if $\exists$ $\mathcal{Y}'(u) \in \underbrace{\mathcal{L}(H \to \mathbb{R}^1)}_{H^*}$

$\mathcal{Y}(u+h) - \mathcal{Y}(u) = \langle \overset{\in H}{\mathcal{Y}'(u)}, h \rangle + \alpha(u,h)$ — ск. пр.

Опр $\mathcal{Y}(u)$ дважды дифф. в т. u, if $\exists\ \mathcal{Y}''(u) \in \mathcal{L}(H \to H)$

$\mathcal{Y}'(u+h) - \mathcal{Y}'(u) = \mathcal{Y}''(u)\cdot h - \beta(u,h)$

// в пр-ве $\mathbb{R}^n$ 1ая произв. — в-р, 2-я — м-ца //

! Зам Ф-ла конечных приращений: $\mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}'(\theta h + x)h$, $0 < \theta < 1$

$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi x \\ \sin 2\pi x \end{pmatrix}$, $x \in [0,1]$ $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$

$\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{F}'(x) = 2\pi \begin{pmatrix} -\sin 2\pi x \\ \cos 2\pi x \end{pmatrix}$; $h = 1$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 2\pi \begin{pmatrix} -\sin 2\pi x \\ \cos 2\pi x \end{pmatrix} \cdot 1$

2) Ф-лы конечных приращений

$C^1(\mathcal{U})$: $\mathcal{Y}(u)$ непр., $\exists\ \mathcal{Y}'(u)$, $|\mathcal{Y}'(u+h) - \mathcal{Y}'(u)| \xrightarrow[h\to\theta_H]{H^*} 0$

$C^2(\mathcal{U})$: — // —, $\|\mathcal{Y}''(u+h) - \mathcal{Y}''(u)\| \xrightarrow[\mathcal{L}(H\to H)]{} 0$

∇ II.1. $U \subset H$ и $[u, u+h] \in U$, тогда if $\mathcal{J}(u) \in C^1(U)$, то $\mathcal{J}(u+h) - \mathcal{J}(u) = \int_0^1 \langle \mathcal{J}'(u+th), h \rangle dt = \langle \mathcal{J}'(u+\theta h), h \rangle$. (II.1)

If $\mathcal{J}(u) \in C^2(U) \Rightarrow$ (II.2) $\langle \mathcal{J}'(u+h) - \mathcal{J}'(u), z \rangle = \int_0^1 \langle \mathcal{J}''(u+th) h, z \rangle dt = \langle \mathcal{J}''(u+\theta h)h, z \rangle$

$\blacktriangle$ Введем ф-цию одной перем-й $f(t) = \mathcal{J}(u+th)$, $t \in [0,1]$

$f(t+\Delta t) - f(t) = \mathcal{J}(u+(t+\Delta t)h) - \mathcal{J}(u+th) \textcircled{=}$

$\textcircled{=}$ //Дифф-ние// $= \underbrace{\langle \mathcal{J}'(u+th), h \rangle}_{f'(t)} \Delta t + \underbrace{\bar{\bar{o}}(\Delta t \|h\|)}_{\bar{\bar{o}}(\Delta t)} \Rightarrow f'(t) = \langle \mathcal{J}'(u+th), h \rangle$

$\mathcal{J}(u+h) - \mathcal{J}(u) = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt = \int_0^1 \langle \mathcal{J}'(u+th), h \rangle dt = \langle \mathcal{J}'(u+\theta h), h \rangle$, $0 < \theta < 1$

Д-м (II.2): $f_1(t) = \langle \mathcal{J}'(u+th), z \rangle$, $t \in [0,1]$

$f_1(t+\Delta t) - f_1(t) = \langle \mathcal{J}'(u+(t+\Delta t)h), z \rangle - \langle \mathcal{J}'(u+th), z \rangle =$

$=$ //Дифф-ние// $= \langle \mathcal{J}''(u+th)\Delta t h + \bar{\bar{o}}(\|\Delta t h\|), z \rangle =$

$= \Delta t \langle \mathcal{J}''(u+th)h, z \rangle + \bar{\bar{o}}(\Delta t) \Rightarrow f_1'(t) = \langle \mathcal{J}''(u+th)h, z \rangle$,

$\langle \mathcal{J}'(u+h) - \mathcal{J}'(u), z \rangle = f_1(1) - f_1(0) = \int_0^1 f_1'(t) dt = \int_0^1 \langle \mathcal{J}''(u+th)h, z \rangle dt = \langle \mathcal{J}''(u+\theta h)h, z \rangle$ $\blacksquare$

3) Дифференцирование простейших функционалов

3a) $\mathcal{J}(u) = \|\mathcal{A}u - b^{\in F}\|^2$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \to F)$

$\mathcal{J}(u+h) - \mathcal{J}(u) = \|\underbrace{\mathcal{A}(u+h) - b}_{\mathcal{A}u - b + \mathcal{A}h}\|^2 - \|\mathcal{A}u - b\|^2 = \cancel{\|\mathcal{A}u - b\|^2} +$

$+ 2 \langle \mathcal{A}u - b, \mathcal{A}h \rangle + \|\mathcal{A}h\|^2 - \cancel{\|\mathcal{A}u - b\|^2} = 2 \langle \mathcal{A}^*(\mathcal{A}u - b), h \rangle + \bar{\bar{o}}(\|h\|)$

$0 \le \frac{\|\mathcal{A}h\|^2}{\|h\|} \le \frac{C\|h\|^2}{\|h\|} \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{J}'(u) = 2\mathcal{A}^*(\mathcal{A}u - b)}$

$\mathcal{J}'(u+h) - \mathcal{J}'(u) = 2\mathcal{A}^* \overbrace{(\mathcal{A}(u+h) - b)}^{\mathcal{A}u - b + \mathcal{A}h \in H} - 2\mathcal{A}^*(\mathcal{A}u - b) =$

$= \cancel{2\mathcal{A}^*(\mathcal{A}u - b)} + 2\mathcal{A}^*\mathcal{A}h - \cancel{2\mathcal{A}^*(\mathcal{A}u - b)} = 2\mathcal{A}^*\mathcal{A}h \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{J}''(u) = 2\mathcal{A}\mathcal{A}^* : H \to \mathcal{L}(H \to H)$

3б) $J(u)=\frac{1}{2}\langle Au,u\rangle-\langle b,u\rangle$, $A\in\mathcal{L}(H\to H)$, $b\in H$

$J(u+h)-J(u)=\frac{1}{2}\langle \underbrace{A(u+h)}_{Au+Ah},u+h\rangle-\langle b,u+h\rangle-\frac{1}{2}\langle Au,u\rangle+$
$+\langle b,u\rangle \ominus$

$\ominus \frac{1}{2}\langle \cancel{Au,u}\rangle+\frac{1}{2}\langle Au,h\rangle+\frac{1}{2}\langle Ah,u\rangle+\frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle-\langle b,u\rangle-$
$-\langle b,h\rangle+\langle \cancel{b,u}\rangle-\frac{1}{2}\langle\cancel{Au},u\rangle=\frac{1}{2}\langle Au,h\rangle+\frac{1}{2}\langle Ah,u\rangle+$
$+\frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle-\langle b,h\rangle=\frac{1}{2}\langle Au+A^*u,h\rangle-\langle b,h\rangle+\frac{1}{2}\underbrace{\langle Ah,h\rangle}_{=\bar{o}(h)}$

$0\leq\frac{\langle Ah,h\rangle}{\|h\|}\leq\frac{\|Ah\|\,\|h\|}{\|h\|}\leq\frac{C\|h\|^2}{\cancel{\|h\|}}\xrightarrow[\|h\|\to 0]{}0$

$\Rightarrow J'(u)=\frac{1}{2}(A+A^*)u-b$

$J'(u+h)-J'(u)=\frac{1}{2}(A+A^*)(\cancel{u}+h)-\cancel{b}-\cancel{\frac{1}{2}(A+A^*)u}+\cancel{b}=$
$=\frac{1}{2}(A+A^*)h$

$\Rightarrow J''(u)=\frac{1}{2}(A+A^*)$

4) Градиент терминального функционала

$J(u)=\|x(T;u)-b\|^2_{E^n}$

$\dot{x}=Dx+Bu,\quad x(t_0)=0$

Эту задачу можно представить как $J(u)=\|Au-b\|^2$,
$A\in\mathcal{L}(L_2(0,T)\to\mathbb{R}^n)$ (доказано ранее) $\Rightarrow J'(u)=2A^*(Au-b)$

A - известен, $Au=x(T;u)$, но A^* - ?

$A^*c=B^T\psi(t;c)$, где $\dot{\psi}=-D^T\psi$, $\psi(T)=c$

Проверим: $\langle Au,c\rangle=\langle u,A^*c\rangle$

$\langle Au,c\rangle_{\mathbb{R}^n}=\langle x(T),\psi(T)\rangle_{\mathbb{R}^n}=\int_{t_0}^{T}(\langle x(t),\psi(t)\rangle)'dt$
$+\langle \cancel{x(t_0)}^{0},\psi(t_0)\rangle=\int_{t_0}^{T}\langle\dot{x},\psi\rangle dt+\int_{t_0}^{T}\langle x,\dot{\psi}\rangle dt=\int_{t_0}^{T}\langle Dx,$
$\psi\rangle dt+\int_{t_0}^{T}\langle Bu,\psi\rangle dt+\int_{t_0}^{T}\langle x,-D^T\psi\rangle dt=\int_{t_0}^{T}\langle u,B^T\psi\rangle dt=$
$=\int_{t_0}^{T}\langle u(t),A^*c\rangle_{E^r}dt=\langle u,A^*c\rangle_{L_2(t_0,T)}$

Схема вычисления $J'(u)$ в т. $u_0(t)$

1) $u_0(t) \longrightarrow \dot{x} = \mathcal{D}x + Bu_0,\ x(t_0) = 0 \longrightarrow x(t; u_0)$

2) $\mathcal{A}u - b = x(T) - b$

3) $\dot{\psi} = -\mathcal{D}^T\psi,\ \psi(T) = x(T) - b \Rightarrow \psi(t)$

4) $\mathcal{J}'(u_0) = 2B^T\psi(t)$